

Kvadratické formy

Definice. Pokud pro $A \in M(n \times n)$ platí $A = A^T$, pak je A **symetrická**.

Je-li $A \in M(n \times n)$ symetrická, pak $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem $\varphi(u) = u^T A u$ je **kvadratická forma** reprezentovaná maticí A .

Definice. Kvadratická forma $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je

- **pozitivně definitní** (PD), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq \vec{0}: \varphi(u) > 0,$$

- **negativně definitní** (ND), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq \vec{0}: \varphi(u) < 0,$$

- **pozitivně semidefinitní** (PSD), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: \varphi(u) \geq 0,$$

- **negativně semidefinitní** (NSD), pokud

$$\forall u \in \mathbb{R}^n: \varphi(u) \leq 0,$$

- **indefinitní** (ID), pokud

$$\exists u, v \in \mathbb{R}^n: \varphi(u) > 0 \wedge \varphi(v) < 0.$$

Věta 10.4. Nechť $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ je diagonální. Pak platí:

- A je pozitivně definitní, právě když $a_{ii} > 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je negativně definitní, právě když $a_{ii} < 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je pozitivně semidefinitní, právě když $a_{ii} \geq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je negativně semidefinitní, právě když $a_{ii} \leq 0$ pro každé $i = 1, \dots, n$,
- A je indefinitní, právě když existují $i, j \in \{1, \dots, n\}$ taková, že $a_{ii} > 0, a_{jj} < 0$.

Definice. Symetrická úprava matice $A \in M(n \times n)$ = úprava aplikovaná na řádky A a následně tatáž úprava aplikovaná na sloupce A . **Symetrická transformace matice** A = konečná posloupnost symetrických úprav.

Lemma 10.7.

- Je-li $A \in M(n \times n)$ symetrická a $C \in M(n \times n)$, pak CAC^T je opět symetrická.
- Symetrická transformace zachovává symetrii matice.

Věta 10.9. Nechť $A \in M(n \times n)$ je symetrická matice a nechť $B \in M(n \times n)$ vznikne z A pomocí symetrické transformace. Pak matice A je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když B je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, . . .).

Věta 10.10. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.

Věta 10.11 (Sylvestrovo kritérium). Necht' $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n,j=1,\dots,n}$ je symetrická matice. Pak matice A je

- pozitivně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- negativně definitní, právě když pro každé $k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

- negativně semidefinitní, právě když pro každou k -tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \dots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \dots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

Vlastní čísla a vektory

Definice. Necht' $A \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo matice** A , jestliže existuje nenulový vektor $x \in \mathbb{C}^n$ takový, že $Ax = \lambda x$. Vektor x pak nazýváme **vlastním vektorem matice A příslušným k vlastnímu číslu λ** .

Věta 10.12. Necht' $A \in M(n \times n)$.

- Prvek $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastním číslem matice A , právě když $\det(\lambda I - A) = 0$.
- Matice A má nejvýše n různých vlastních čísel.

Definice. Necht' $A \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda I - A)$ se nazývá **charakteristický polynom matice** A . Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 10.13. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.

Věta 10.15. Necht' $A \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak platí:

- A je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,
- A je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,
- A je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,
- A je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,
- A je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.